Corrigé

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $A(1;-1;3) \in (AB)$.

   Une représentation graphique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-1 \\ z = 1t+3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. d est parallèle à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d. $E(-5;7;1) \in d$.

   Une représentation graphique de la droite d est $\begin{cases} x = 2t'-5 \\ y = 3t'+7 \\ z = 1t'+1 \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

3. a. On détermine les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\14\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

   $\frac{-2}{2} \neq \frac{14}{3}$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (AF) et d ne sont donc pas parallèles. Elles sont sécantes ou non coplanaires.

   b. Une représentation graphique de la droite (AF) est $\begin{cases} x = -2t''+1 \\ y = 14t''-1 \\ z = 3 \end{cases}$ $(t'' \in \mathbb{R})$.

   $M(x;y;z)$ est le point d'intersection des droites (AF) et d si, et seulement si,

   $$\begin{cases} x = -2t''+1 = 2t'-5 \\ y = 14t''-1 = 3t'+7 \\ z = 3 = t'+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t''+1 = 2\times 2-5 \\ y = 14t''-1 = 3\times 2+7 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'' = 1 \\ t'' = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$$

   Ce système admet pour solution $(t';t'') = (2;1)$. Les deux droites sont sécantes.
   En remplaçant t' par 2 dans le système de représentation paramétrique de la droite d, on trouve : $\begin{cases} x = 2\times 2-5 = -1 \\ y = 3\times 2+7 = 13 \\ z = 2+1 = 3 \end{cases}$.

Conclusion : les droites d et (AF) sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(-1;13;3)$. Elles se coupent donc en F.